

ECUACIONES Y SISTEMAS DIFERENCIALES NO LINEALES

5.1 Calcule los puntos críticos de los siguientes sistemas autónomos no lineales:

$$(a) \begin{cases} x' = y \\ y' = 4x^3 - 4x \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = x(1 - x^2 - 3y^2) \\ y' = y(3 - x^2 - 3y^2) \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 6 \\ y' = x^2 - y \end{cases}$$

5.2 Transforme los sistemas dados utilizando coordenadas polares y resuélvalos:

$$(a) \begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

5.3 Halle el sistema lineal asociado en cada punto crítico de los siguientes sistemas y clasifique los puntos críticos, si es posible, como nodo estable o inestable, punto espiral estable o inestable o punto de silla:

$$(a) \begin{cases} x' = 3x^2 - 4y \\ y' = x - y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2 \\ y' = x^2 - y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = 1 - 2xy \\ y' = 2xy - y \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x' = y - x^2 + 2 \\ y' = x^2 - xy \end{cases}.$$

5.4 Encuentre el sistema lineal asociado a los siguientes sistemas no lineales en el punto crítico $(0, 0)$:

$$(a) \begin{cases} x' = \sin x - 4y \\ y' = \sin 2x - 5y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = \sin x - 4y \\ y' = \sin 2x - 5y \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = ye^x \\ y' = e^x - 1 \end{cases}$$

5.5 Halle la expresión de las órbitas y dibuje el diagrama de fases de los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = 1 + y - x^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y - 3x^2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 + 3x^2 - y^2 \end{cases}$$

¿Para qué valores de b es periódica la solución del sistema (a) con $x(0) = 0, y(0) = b$? En el apartado (c) precise la solución que verifica $x(0) = \frac{3}{4}, y(0) = \frac{5}{4}$.

5.6 Sea la ecuación no lineal $y'' = y - y^2 - yy'$. Escriba el sistema asociado y clasifique los puntos críticos y dibuje el diagrama de fases. Para la solución $y(t)$ de la ecuación que verifica las condiciones iniciales $y(1) = 2, y'(1) = 0$, ¿qué valor nos proporciona $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?

5.7 Sea $y'' = 1 - y^2 - (y')^2$. Obtener la expresión de las órbitas, dibuje el diagrama de fases y estudie si es periódica la solución que verifica $y(0) = y'(0) = 1$.

5.8 Estudie si los siguientes sistemas admiten soluciones periódicas:

$$(a) \begin{cases} x'(t) = 4x + 2y - 2x^2 \\ y'(t) = 4x - 3y + 4xy \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x'(t) = y + x(2 - x^2 - y^2) \\ y'(t) = -x + y(2 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x'(t) = 2x + y + x^3 \\ y'(t) = 3x - y + y^3 \end{cases}$$